
Innovation Management and Operational Strategies

http://www.journal-imos.ir

Innovation Management and Operational Strategies, Volume 1, Issue 2, Page: 297-309

Paper Type: Original Article



Evaluation and Estimation of Outputs and Inputs in Inverse Data Envelopment Analysis with Interval Data

Hossein Jafari*

Department of Industrial Engineering- System Management and Productivity, Sharif University, Tehran, Iran.

Citation:



Jafari, H. (2020). Evaluation and estimation of outputs and inputs in inverse data envelopment analysis with interval data. *Innovation management and operational strategies, 1*(3), 297-309.

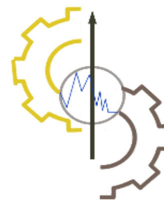
Received: 11/05/2020	Reviewed: 02/07/2020	Revised: 04/08/2020	Accept: 08/09/2020

Abstract

Purpose: Examining the history and growth trend of developed countries and comparing it with developing countries shows that the difference and strength of these countries is the optimal use of opportunities and facilities they have had.
Methodology: In this paper, we review DEA models for estimating input / output levels and applying manager or decision maker preferences, as well as improving inefficient units over a period of time. Finally, we have implemented the obtained models in 24 supervisory branches with four input indicators and four indicators, in one of the banks, and the results have been presented and interpreted in the form of several tables.
Findings: The results show that management can increase the index of attracting new customers in proportion to the ability of the collection in the input indicators.
Originality/Value: The problem has been implemented on the unit under the second evaluation and has shown the results in different cases, although this is important for all units under evaluation.
Keywords: Inverse data envelopment analysis, Output estimation, Inputs estimation, Efficiency.

JEL Classificaton: C61.

*Corresponding Author
Email Address: hojafari34@gmail.com
http://dori.net/dor/20.1001.1.27831345.1399.1.3.7.0   https://doi.org/10.22105/imos.2021.262569.1017



مدیریت نوآوری و راهبردهای عملیاتی



نوع مقاله: پژوهشی

ارزیابی و تخمین خروجی‌ها و ورودی‌ها در تحلیل پوششی داده‌های معکوس با داده‌های بازه‌ای

حسین جعفری*

گروه مهندسی صنایع-مدیریت سیستم و بهره‌وری، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران.

دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۲۲	بررسی: ۱۳۹۹/۰۴/۱۲	اصلاح: ۱۳۹۹/۰۵/۱۴	پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۸

چکیده

هدف: بررسی تاریخ و روند رشد کشورهای توسعه‌یافته و مقایسه آن با کشورهای در حال توسعه نشان می‌دهد که وجه تمایز و نقطه قوت این کشورها استفاده بهینه از فرصت‌ها و امکاناتی است که در اختیار داشته‌اند.

روش‌شناسی پژوهش: در این مقاله مدل‌های DEA را برای تخمین سطوح ورودی/خروجی و اعمال ترجیحات مدیر یا تصمیم‌گیرندگان و نیز بهبودبخشی واحدهای ناکارا در حالت بازه‌ای موردبررسی قرار می‌دهیم. درنهایت مدل‌های به‌دست‌آمده را در ۲٤ شعبه سرپرستی با چهار شاخص ورودی و چهار شاخص، دریکی از بانک‌ها پیاده‌سازی شده است و نتایج در قالب جداولی متعدد آورده شده و تفسیر گردیده است.

یافته‌ها: نتایج نشان می‌دهد که مدیریت می‌تواند متناسب با توانمندی مجموعه در شاخص‌های ورودی، نسبت به میزان افزایش شاخص جذب مشتریان جدید اقدام نماید.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: مسئله بر روی واحد تحت ارزیابی دوم پیاده‌سازی شده است و نتایج را در حالت‌های مختلف نمایش داده است البته این مهم برای همه واحدهای تحت ارزیابی قابل پیاده‌سازی می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ای معکوس، تخمین خروجی‌ها، تخمین ورودی‌ها، کارایی.

طبقه‌بندی JEL: C61.

* **نویسنده مسئول**

آدرس رایانامه: hojafari34@gmail.com

https://doi.org/10.22105/imos.2021.262569.1017

http://dorl.net/dor/20.1001.1.27831345.1399.1.3.7.0

www.journal-imos.ir

مدیریت نوآوری و راهبردهای عملیاتی، دوره ۱، شماره ۳،صفحه: ۲۹۷-۳۰۹

۱ـ مقدمه

موضوع کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده از مباحث مهم در تصمیم‌گیری مدیران، جهت اجرای برنامه‌های استراتژیك می‌باشد. لذا بررسی‌های مرتبط با کارایی، در جهت تحلیل وضعیت کنونی اقتصادی و صنعتی کشورهای مختلف و ارائه راه‌کارهای مؤثر در جهت رفع عقب‌ماندگی، بسیار حائز اهمیت می‌باشد. تحلیل پوششی داده‌ها روشی مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی است که کارایی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیر[1] را بر اساس شاخص‌های ورودی و خروجی در مقایسه با هم محاسبه می‌نماید و واحدهای کارا و ناکارا را تعیین می‌کند. همچنین میزان اهداف قابل‌دسترس در هر شاخص، برای واحدهای ناکارا محاسبه می‌شود. از این تکنیک می‌توان در ارزیابی عملکرد شعب بانک‌ها، بیمه‌ها، ادارات، بیمارستان‌ها، مدارس، واحدهای صنعتی (تولیدی) و هر سازمانی که واحدهای صنفی داشته باشد استفاده نمود. یکی از مسائل مطرح در سال‌های اخیر در DEA، مسئله‌ی تخمین خروجی‌ها (ورودی‌ها) به هنگام تغییر ورودی‌ها (خروجی‌ها) است؛ این مسائل تحت عنوان مسائل DEA معکوس[2]، مطرح می‌شوند.

مسائل DEA معکوس، اولین بار توسط وی و همکاران[3] (۲۰۰۰) مطرح شد؛ به این صورت که اگر در یک DMU، ورودی‌ها را به میزان معینی افزایش دهیم و بخواهیم کارایی ثابت بماند، چه مقدار خروجی باید تولید کنیم؛ مدل ارائه‌شده برای پاسخ به این سؤال را مدل DEA معکوس (Inverse DEA) می‌نامند. آن‌ها در مدل خود فرض نمودند که با افزایش سطوح ورودی، میزان کارایی DMU ثابت می‌ماند و سپس به تخمین خروجی‌ها پرداختند. آن‌ها مسئله DEA معکوس را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه تبدیل نموده و همچنین نشان دادند که در بعضی موارد خاص، مسئله DEA معکوس می‌تواند ساده شود و تبدیل به یک برنامه‌ریزی خطی تک هدفه گردد. یان و همکاران[4] (۲۰۰۲) نتایج به‌دست‌آمده از مقاله وی و همکاران را با استفاده از نسبت DEA مخروطی توسعه و گسترش دادند؛ به عبارت دیگر آن‌ها مسئله DEA معکوس با ساختار نسبت مخروطی را مورد بررسی قرار دادند.

همان‌طور که بیان شد، مدل‌های DEA معکوس که توسط «وی» و «یان» مطرح شد، با فرض ثابت ماندن کارایی، به تخمین سطوح خروجی به هنگام افزایش سطوح ورودی می‌پرداخت؛ لذا جهانشاهلو و همکاران[5] مدل ارائه‌شده توسط «یان» را گسترش دادند و مسئله تخمین خروجی‌ها به هنگام افزایش سطوح ورودی را با فرض بهبود سطح کارایی DMU موردنظر، موردبحث قرار دادند. هادی‌ـ‌ونچه و فروغی[6] (۲۰۰۶) طی مقاله‌ای یک مدل کلی برای مسائل تخمین ورودی‌ها/خروجی‌ها ارائه دادند. در حقیقت، آنچه تاکنون به آن پرداخته‌شده بود فقط افزایش در سطوح ورودی و خروجی بود؛ درحالی‌که بعضی واحدها ممکن است در نظر داشته باشند علاوه بر افزایش سطوح ورودی/خروجی، بعضی سطوح ورودی/خروجی خود را کاهش دهند؛ این مبحث نسبت به مباحث قبلی، کلی‌تر می‌باشد. هادی‌ـ‌ونچه و فروغی در مقاله خود تغییرات دلخواه (افزایش یا کاهش) در سطوح ورودی (خروجی) را در نظر گرفتند و یک مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) را برای تخمین سطوح خروجی (ورودی) پیشنهاد دادند. «وی» و همکاران به‌منظور تخمین سطوح خروجی (ورودی)، یک مدل MOLP را برای هنگامی‌که DMU تحت ارزیابی ناکاراست و نیز یک مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) را برای DMU با کارایی ضعیف ارائه دادند. ولی مدلی که هادی‌ـ‌ونچه و فروغی ارائه دادند، نیاز به این طبقه‌بندی ندارد و قادر است سطوح ورودی و خروجی را بدون در نظرگرفتن نوع کارایی DMU (کارای قوی، کارای ضعیف، ناکارا) تخمین بزنند. همچنین آن‌ها در مقاله خود نشان

[1] Dicision Maker Unit (DMU)
[2] Inverse DEA
[3] Wei et al.
[4] Yan et al.
[5] Jahanshahloo et al.
[6] Hadi-Vencheh & Foroughi

جعفری/ مدیریت نوآوری و راهبردهای عملیاتی، دوره ۱، شماره ۳، صفحه: ۲۹۷ـ۳۰۹

دادند که مدل تخمین ورودی/خروجی که «وی» و همکاران ارائه دادند همیشه پاسخ صحیح نمی‌دهد و اثبات نمودند که در مدل تخمین، ورودی‌ها یعنی محدودیت $\alpha_0 \geq X_0$ که در آن α_0 بردار ورودی‌های جدید و X_0 بردار ورودی‌های قبلی است و محدودیت $\beta_0 \geq y_0$ که در آن β_0 بردار خروجی‌های جدید و y_0 بردار خروجی‌های قبلی است باید حذف شود؛ در واقع آن‌ها یک مدل کلی برای تخمین سطوح ورودی/خروجی ارائه دادند. همان‌طور که می‌دانیم، از مدل‌های DEA می‌توان برای تخمین سطوح خروجی (ورودی) یک واحد تصمیم‌گیرنده، هنگامی که همه یا بعضی از سطوح ورودی‌اش (خروجی‌اش) افزایش می‌یابد، با فرض ثابت ماندن کارایی و یا بهبود کارایی، بهره برد. حسین زاده و همکاران[1] (۲۰۱۸) این ایده را برای داده‌های بازه‌ای، گسترش و تعمیم دادند؛ یعنی آن‌ها تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) با داده‌های بازه‌ای را به‌کار برده‌اند تا تعیین کنند هنگام افزایش سطوح ورودی، چه مقدار خروجی باید تولید نمایند تا سطح کارایی DMU موردنظر ثابت بماند و یا بهبود موردنظر تصمیم‌گیرنده را داشته باشد. برای تخمین سطوح خروجی، دو مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه ارائه دادند که با حل آن، سطوح خروجی یا به عبارتی کران‌های بالا و پایین بازه‌های جدید سطوح خروجی را تخمین زدند. درواقع آن‌ها مدل ارائه‌شده توسط دسپوتیس واسمیرلیس[2] (۲۰۰۲) در زمینه تعیین کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با داده‌های بازه‌ای را با مدل DEA معکوسی که توسط «وی» و همکاران ارائه‌شده بود ترکیب نموده و مدل جدیدی را برای تخمین سطوح خروجی واحدهای تصمیم‌گیرنده با داده‌های بازه‌ای به هنگام افزایش سطوح ورودی و با فرض ثابت ماندن یا بهبود کارایی ارائه دادند.

۲ـ مدل DEA با داده‌های بازه‌ای

فرض کنید n واحد تصمیم گیر به‌صورت $\{DMU_j; j = 1, \dots, n\}$ موجود است که هر کدام از m ورودی جهت تولید s خروجی استفاده می‌کنند (واحدهای تصمیم‌گیر متجانس می‌باشند). مقادیر داده‌های ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیر به‌صورت بازه‌های کران‌دار است؛ یعنی مقدار دقیق داده‌ها در اختیار نیست و به‌جای آن، کران بالا و پایین هر داده، تعیین شده است؛ به‌طوری‌که برای DMU_j (j=1,…,n) داریم $x_{ij}^l \leq x_{ij} \leq x_{ij}^U$ (i=1,...,m) یا به عبارت دیگر $x_{ij} \in [x_{ij}^l, x_{ij}^U]; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ و نیز $y_{rj}^L \leq y_{rj} \leq y_{rj}^U$ یا به عبارت دیگر $y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U]; r = 1, \dots s; j = 1, \dots n$ ، که در آن x_{ij}^L ، y_{rj}^L کران‌های پایین بازه‌ها و x_{ij}^U، y_{rj}^U کران‌های بالای بازه‌ها می‌باشند؛ همچنین مقادیر آن‌ها ثابت و اکیداً مثبت فرض می‌شود و همیشه $x_{ij}^l \leq x_{ij}^U$، $y_{rj}^L \leq y_{rj}^U$ و اگر داشته باشیم $x_{ij}^l = x_{ij}^U$ ، آنگاه i امین ورودی j امین واحد تصمیم گیر، دارای مقدار دقیق و معینی است. حال اگر مدل CCR با داده‌های بازه‌ای را بخواهیم به‌صورت بازه‌ای نمایش دهیم، آنگاه:

$$\text{Max} \sum_{r=1}^{s} u_r \left[y_{rp}^l, y_{rp}^u\right]$$

$$s.t.$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \left[x_{ip}^l, x_{ip}^u\right] = 1 \qquad (1)$$

از

طرفی با توجه به تعریف مفهوم ترکیبات محدب خواهیم داشت:

---

[1] Hosseinzadeh et al.

[2] Despotis & Smirlise

$$\sum_{r=1}^{s} u_r\left[y_{rp}^{l}, y_{rp}^{u}\right] - \sum_{i=1}^{m} v_i\left[x_{ip}^{l}, x_{ip}^{u}\right] \le 0$$
$$u_r, v_i \ge 0; r = 1,\dots,s; i = 1,\dots,m$$
$$x_{ij} = x_{ij}^{l} + \delta_{ij}(x_{ij}^{u} - x_{ij}^{l}) \quad , \quad o \le \delta_{ij} \le 1 \quad ,1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{m} \;,\; 1 \le \mathrm{j} \le \mathrm{n}$$
$$y_{rj} = y_{rj}^{l} + s_{rj}(y_{rj}^{u} - y_{rj}^{l}) \quad , \quad 0 \le s_{rj} \le 1 \;,\; 1 \le r \le s \;,\; 1 \le j \le n \qquad (۲)$$

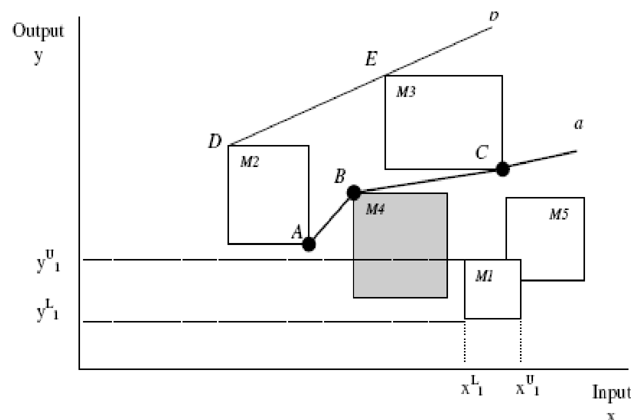
اگر روابط بالا را در معادله (۱) قرار دهیم، در نهایت معادله (۱) به‌صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\mathrm{Max} \sum_{r=1}^{s} u_r\left[y_{rp}^{L} + s_{rp}\left(y_{rp}^{U} - y_{rp}^{L}\right)\right]$$

S.t.

$$\sum_{i=1}^{m} v_i\left[x_{ip}^{L} + \delta_{ip}\left(x_{ip}^{U} - x_{ip}^{L}\right)\right] = 1$$
$$\sum_{r=1}^{s} u_r\left[y_{rj}^{L} + s_{rj}\left(y_{rj}^{U} - y_{rj}^{L}\right)\right] - \sum_{i=1}^{m} v_i\left[x_{ij}^{L} + \delta_{ij}\left(x_{ij}^{U} - x_{ij}^{L}\right)\right] \le 0; j = 1,\dots,n \qquad (۳)$$
$$u_r \ge 0; r = 1,\dots,s$$
$$v_i \ge 0; i = 1,\dots,m$$
$$0 \le \delta_{ip} \le 1; i = 1,\dots,m$$
$$0 \le s_{rp} \le 1; r = 1,\dots,s$$

مدل (۳) یک مدل برنامه‌ریزی خطی است. حل این مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تا حدودی دشوار است، لذا وقتی داده‌ها، بازه‌ای باشند، واحدها آزادند که هر مقدار در این بازه‌ها را اختیار کنند و امتیاز کارایی خود را ماکزیمم کنند. بعضی واحدها ممکن است در هر ترکیبی از مقادیر داخل بازه‌ها، کارا باشند و بعضی واحدهای دیگر ممکن است بسته به مقداری که اختیار می‌کنند، کارا یا ناکارا با باشند. برای نشان دادن DEA بازه‌ای، یک مثال (شکل ۱) را با ۵ واحد $M_1, M_2, \dots, M_5$ که هرکدام دارای یک ورودی x و یک خروجی y می‌باشند، نشان می‌دهیم.



شکل ۱- نمایش مرز کارا با داده‌های بازه‌ای.
Figure 1- Efficient frontire with interval data.

اگر داده‌ها بازه‌ای باشند، آنگاه می‌توان یک بازه‌ی کارایی برای واحد تحت ارزیابی تعیین نمود؛ به‌عبارت‌دیگر، می‌توان کران پایین و بالایی برای کارایی DMU تحت ارزیابی در نظر گرفت؛ زیرا به ازای بعضی نقاط در بازه، واحد تحت ارزیابی، بیشترین مقدار کارایی و نیز به ازای بعضی نقاط دیگر، کمترین مقدار کارایی خود را اختیار می‌کند؛ بنابراین، کارایی واحد تحت ارزیابی در بازه‌ی $[\theta^L, \theta^U]$ قرار می‌گیرد که در آن θ^L، کمترین مقدار کارایی و θ^U بیشترین مقدار کارایی واحد تحت ارزیابی است. در جدول ۱، معادلات در حالات پوششی و مضربی CCR ورودی‌محور و خروجی‌محور نشان داده شده است.

جدول ۱- مدل‌های پوششی و مضربی CCR ورودی محور.
Table 1- Envelopment and multiplier models of input-oriented of CCR.

مدل پوششی مضربی CCR ورودی محور برای تعیین بیشترین مقدار کارایی	مدل پوششی CCR ورودی محور برای محاسبه کمترین مقدار کارایی واحد
$\text{Min } \theta$ S.t. $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda_j x_{ij}^U + \lambda_p x_{ip}^L \le \theta x_{ip}^L; i = 1,\ldots,m$ $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda_j y_{rj}^L + \lambda_p y_{rp}^U \ge y_{rp}^U; r = 1,\ldots,s$ $\lambda_j \ge 0; j = 1,\ldots,n$	$\text{Min } \theta$ s.t. $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda_j x_{ij}^L + \lambda_p x_{ip}^L \le \theta x_{ip}^U; i = 1,\ldots,m$ $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \lambda_j y_{rj}^U + \lambda_p y_{rp}^L \ge y_{rp}^L; r = 1,\ldots,s$ $\lambda_j \ge 0; j = 1,\ldots\ldots\ldots n$

۳ـ مدل کلی برای تخمین سطوح خروجی در DEA با داده‌های بازه‌ای

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده به‌صورت $\{DMU_j; j = 1,\ldots,n\}$ موجود است که هرکدام از m ورودی جهت تولید s خروجی استفاده می‌کنند. مقادیر داده‌های ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیرنده به‌صورت بازه‌های کران‌دار هست یعنی مقدار دقیق داده‌ها در اختیار نیست و به‌جای آن کران بالا و پایین هر داده تعیین‌شده است. به‌طوری‌که برای DMU_j (j=1,…,n) داریم $x_{ij}^l \le x_{ij} \le x_{ij}^U$ (i=1,…,m) یا به‌عبارت‌دیگر $x_{ij} \in [x_{ij}^l, x_{ij}^U]; i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n$ ونیز $y_{rj}^L \le y_{rj} \le y_{rj}^U$ یا به‌عبارت‌دیگر $y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U]; r = 1,\ldots s; j = 1,\ldots n$ که در آن x_{ij}^L ، y_{rj}^L کران‌های پایین بازه‌ها و x_{ij}^U، y_{rj}^U کران‌های بالای بازه‌ها می‌باشند. نیز مقادیر آن‌ها ثابت و اکیداً مثبت فرض می‌شود و همیشه $x_{ij}^l \le x_{ij}^U$، $y_{rj}^L \le y_{rj}^U$ و اگر داشته باشیم $x_{ij}^l = x_{ij}^U$، آنگاه i امین ورودی j امین واحد تصمیم‌گیرنده دارای مقدار دقیق و معینی است. واحد تحت ارزیابی p ام یعنی DMU_P را در نظر بگیرید. فرض می‌شود که ورودی‌های این واحد یا به‌عبارت‌دیگر کران‌های پایین و بالای ورودی‌های DMU_P یعنی x_{ip}^L و x_{ip}^U (i=1,…m) به ترتیب به میزان Δx_{ip}^L و Δx_{ip}^U (i=1,…,m) تغییر (افزایش یا کاهش) یافته‌اند. لذا مقادیر جدید ورودی DMU_P به‌صورت $\alpha_{ip}^L = x_{ip}^L + \Delta x_{ip}^L; i = 1,\ldots,m$ و $\alpha_{ip}^U = x_{ip}^U + \Delta x_{ip}^U; i = 1,\ldots,m$ خواهد بود یا به‌عبارت‌دیگر مقادیر ورودی جدید به‌صورت بازه‌ی کران‌دار $[\alpha_{ip}^L, \alpha_{ip}^U]$;i=1,…,m، هست. در این صورت در نظر داریم مقادیر جدید خروجی DMU_P را با فرض ثابت ماندن کارایی و نیز بهبود سطح کارایی DMU_P تخمین بزنیم.

فرض می‌کنیم که $\beta_p = (\beta_{1p},\ldots,\beta_{rp},\ldots,\beta_{sp})$ مقادیر جدید خروجی DMU_P باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\text{Max}\ \ \beta_p = (\beta_{1p}, \dots, \beta_{rp}, \dots, \beta_{sp}) \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[x_{ij}^L, x_{ij}^U\right] \le \left[\alpha_{ip}^L, \alpha_{ip}^U\right]; i = 1, \dots, m \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[y_{rj}^L, y_{rj}^U\right] \ge \left[\phi_*^L, \phi_*^U\right] \beta_{rp}; r = 1, \dots, s \\ &\lambda_j \ge 0; j = 1, \dots, n \end{aligned} \qquad (۴)$$

چون داده‌ها بازه‌ای می‌باشند مقادیر جدید خروجی را به‌صورت بازه‌های کران‌دار؛ $\left[\beta_{rp}^L, \beta_{rp}^U\right]$ $r=1,\dots,s$ که توسط جفت مدل‌های زیر که با استفاده از مدل‌های DEA بازه‌ای ارائه‌شده تخمین می‌زنیم.

جدول ۲ - محاسبه بیشترین و کمترین مقدار خروجی DMU_P.

Table 2- Maximum and minimum of the output value of DMUP.

محاسبه بیشترین مقدار خروجی DMU_P هنگامی‌که داده‌های ورودی و خروجی‌اش به‌صورت بازه‌ای هست	محاسبه کمترین مقدار خروجی DMU_P هنگامی‌که داده‌های ورودی و خروجی‌اش به‌صورت بازه‌ای هست
$\text{Max}\ \ \beta_p^U = \left(\beta_{1p}^U, \beta_{2p}^U, \dots, \beta_{sp}^U\right)$ s.t. $\sum_{j=1, j\ne p}^{n} \lambda_j x_{ij}^U + \lambda_p x_{ip}^L \le \alpha_{ip}^L; i=1,\dots,m$ $\sum_{j=1, j\ne p}^{n} \lambda_j y_{rj}^L + \lambda_p y_{rp}^U \le (1-\frac{\eta}{100})\phi_*^U\ \beta_{rp}^U; r=1,\dots,s$ $\lambda_j \ge 0; j=1,\dots,n$ (۵)	$\text{Max}\ \beta_p^L = \left(\beta_{1p}^L, \beta_{2p}^L, \dots, \beta_{sp}^L\right)$ s.t. $\sum_{j=1, j\ne p}^{n} \lambda_j x_{ij}^L + \lambda_p x_{ip}^U \le \alpha_{ip}^U; i=1,\dots,m$ $\sum_{j=1, j\ne p}^{n} \lambda_j y_{rj}^U + \lambda_p y_{rp}^L \le (1-\frac{\eta}{100})\phi_*^L\ \beta_{rp}^L; r=1,\dots,s$ $\lambda_j \ge 0; j=1,\dots,n$ (۶)

مقادیر ϕ_*^L و ϕ_*^U مقادیر کارایی هستند که با حل جفت مدل‌های ارائه‌شده در روابط (۵) و (٦) به دست می‌آید مدل‌های خطی چندهدفه می‌باشند که برای حل آن‌ها می‌توان به کمک روش‌های تصمیم‌گیری و استفاده از نظرات افراد تصمیم‌گیرنده به هر شاخص خروجی وزنی را که نشان‌دهنده ارزش و اهمیت آن شاخص می‌باشد ارائه داد و سپس با استفاده از مجموع موزون تابع هدف را به‌صورت خطی نوشت. فرض کنید که w_r ; $r=1,\dots s$ وزن‌های اختصاص داده‌شده به هر شاخص خروجی باشند. در این صورت توابع هدف مدل‌های و را به ترتیب می‌توان به‌صورت $\sum_{r=1}^{s} w_r \beta_{rp}^L$ و $\sum_{r=1}^{s} w_r \beta_{rp}^U$ نوشت.

در دو مدل‌بالا فرض شده که ضمن افزایش ورودی‌ها سطح کاراییDMU_P ثابت باقی می‌ماند. اگر تصمیم گیر در نظر داشته باشد که ضمن افزایش ورودی‌ها، سطح کارایی واحد تحت ارزیابی را نیز به میزان η بهبود دهد، کافی است در مدل مربوط به محاسبه بیشترین مقدار در سمت راست محدودیت دوم به‌جای عبارت $\phi_*^U \beta_{rp}^U$، عبارت $\phi_*^U \beta_{rp}^U(1 -$



$\left(\eta/_{100}\right)$ را قرار دهیم در مدل مربوط به محاسبه کمترین مقدار در محدودیت دوم به‌جای عبارت $\emptyset_*^L\beta_{rp}^L$، عبارت $\emptyset_*^L\beta_{rp}^L\left(1-\eta/_{100}\right)$ را قرار می‌دهیم.

واحد تحت ارزیابی p ام یعنی DMU_Pرا در نظر بگیرید. فرض می‌شود که خروجی‌های این واحد یا به‌عبارت‌دیگر کران‌های پایین و بالای خروجی‌های DMU_Pیعنی y_{rp}^L و y_{rp}^U $(r=1,\ldots,s)$ به ترتیب به میزان Δy_{rp}^Lو $\Delta y_{rp}^U$$(r=1,\ldots,s)$ تغییریافته‌اند لذا مقادیر جدید خروجی DMU_Pبه‌صورت$\beta_{rp}^U=y_{rp}^U+\Delta y_{rp}^U; r=$ و $\beta_{rp}^L=y_{rp}^L+\Delta y_{rp}^L; r=1,\ldots,s$ $1,\ldots,s$ خواهد بود با به‌عبارت‌دیگر مقادیر خروجی جدید به‌صورت بازه‌ی کران‌دار؛$r=1,\ldots,s$ $[\beta_{rp}^L,\beta_{rp}^U]$، است. در این صورت در نظر داریم مقادیر جدید ورودیDMU_P را با فرض ثابت ماندن کارایی و نیز بهبود سطح کارایی DMU_Pتخمین بزنیم.

چون داده‌ها بازه‌ای می‌باشند مقادیر جدید ورودی را به‌صورت بازه‌های کران‌دار؛$i=1,\ldots,m$ $[\alpha_{ip}^L,\alpha_{ip}^U]$، توسط جفت مدل‌های زیر که با استفاده از مدل‌های DEA بازه‌ای ارائه‌شده تخمین می‌زنیم.

جدول ۳- محاسبه بیشترین و کمترین مقدار ورودی DMU_P.

Table 3- Maximum and minimum of the input value of DMU_P.

محاسبه بیشترین مقدار ورودیDMU_P هنگامی‌که داده‌های ورودی و خروجی‌اش به‌صورت بازه‌ای هست	محاسبه کمترین مقدار ورودیDMU_P هنگامی‌که داده‌های ورودی و خروجی‌اش به‌صورت بازه‌ای هست
Min $\alpha_p^U=\left(\alpha_{1p}^U,\alpha_{2p}^U,\ldots,\alpha_{mp}^U\right)=\sum_{i=1}^m w_i\alpha_{ip}^L$ s.t. $\sum_{j=1, j\neq p}^n \lambda_j x_{ij}^U+\lambda_p x_{ip}^L\leq\left(1+\frac{\delta}{100}\right)\theta^{U*}\alpha_{ip}^L; i=1,\ldots,m$ $\sum_{j=1, j\neq p}^n \lambda_j y_{rj}^L+\lambda_p y_{rp}^U\leq\beta_{rp}^U; r=1,\ldots,s$ $\lambda_j\geq 0; j=1,\ldots,n$	Min $\sum_{i=1}^m w_i\alpha_{ip}^U=$ $\alpha_p^L=\left(\alpha_{1p}^L,\alpha_{2p}^L,\ldots,\alpha_{mp}^L\right)$ s.t. $\sum_{j=1, j\neq p}^n \lambda_j x_{ij}^L+\lambda_p x_{ip}^U\leq\left(1+\frac{\delta}{100}\right)\theta^{L*}\alpha_{ip}^U; i=1,\ldots,m$ $\sum_{j=1, j\neq p}^n \lambda_j y_{rj}^U+\lambda_p y_{rp}^L\leq\beta_{rp}^L; r=1,\ldots,s$ $\lambda_j\geq 0; j=1,\ldots,n$

۵ـ مطالعه موردی

ازآنجاکه بانک‌ها از بخش‌های اثرگذار در توسعه و پیشرفت هر کشور هستند، منابع ویژه‌ای به آن‌ها اختصاص داده می‌شود و تحت نظارت و کنترل ویژه‌ای می‌باشند. ازاین‌رو، ارزیابی عملکرد بانک‌ها از اهمیت بسیاری برخوردار است. عدم کارایی در بانکداری، منجر به اشکالات و موانعی در توسعه‌ی بازار سرمایه خواهد شد. با پیگیری‌های فراوان، توانستیم اطلاعات مربوط به یکی از بانک‌های کشور در سال ۱۳۹۷ را استخراج کنیم؛ این بانک دارای ۲۴ شعبه سرپرستی بوده‌است که همگی آن‌ها را در مطالعه مذکور، در نظرگرفته‌ایم. در جدول ۴، شاخص‌های ورودی و خروجی را بر اساس مطالعات میدانی و کتابخانه‌ای، استخراج کرده‌ایم:

داده‌های هریک از این شاخص‌های جدول ۴، در حالت قطعی و بعضاً به دلایل ابهام، به‌صورت بازه‌ای در نظرگرفته شد. در حالت بازه‌ای، با حل مدل‌ها و میزان کران‌های بالا و پایین کارایی ورودی محور، هریک از این شعب در مقایسه با یکدیگر، تعیین شد که در جدول ۱ نشان داده شده است. با توجه به حالت‌های مختلف ایجادشده برای θ^L وθ^U، می‌توانیم ارزیابی‌های مختلف زیر را داشته باشیم:

الف: اگر کران بالا و پایین کارایی هر DMU برابر یک باشد، آنگاه DMU کارا محسوب می‌شود (بر روی مرز کارا قرار دارد).

$$E^{++} = \left[DMU_j : \theta^L = \theta^U = 1 \right] \quad (۷)$$

ب: اگر واحدی در بهترین شرایط خود، کارا و در بدترین شرایط خود، ناکارا باشد، در این صورت نمی‌توان در مورد کارایی واحد تحت ارزیابی، به صراحت اظهار نظر نمود.

$$E^{+} = \left[DMU_j : \theta^L \prec 1, \theta^U = 1 \right] \quad (۸)$$

جدول ٤- شاخص‌های ورودی و خروجی.
Table 4- Input and output indicators.

شاخص‌های ورودی	شاخص‌های خروجی
هزینه‌ها (هزینه‌های عملیاتی): این هزینه‌ها شامل هزینه‌های آب و برق، تلفن، اجاره‌ی محل (مکانی که شعبه در آن قرار دارد)، ملزومات اداری، هزینه‌های مربوط به کارکنان (حقوق)، هزینه‌های مربوط به دوره‌های آموزشی برای کارکنان و ...می‌باشد.	میزان جذب مشتریان جدید: این شاخص، بیان‌گر تعداد مشتری جدید است که در بازه‌های زمانی مشخص، توسط هر شعبه، جذب بانک شده است و نشان‌دهنده‌ی توانایی یک شعبه در جلب نظر مشتری و افتتاح حساب توسط وی می‌باشد و می‌تواند به تسهیلات و اعتباراتی که یک شعبه به مشتریان خود اختصاص می‌دهد، بستگی داشته باشد.
مطالبات (تسهیلات معوق): بانک به مشتری‌های خود تسهیلاتی اعم از وام، اعتبار و ...اعطا می‌کند؛ درواقع، مشتری در قبال بانک بدهکار خواهد شد؛ به این بدهی‌های مشتریان بانک در قبال تسهیلاتی که به آنها تعلق‌گرفته‌است، مطالبات معوق گفته می‌شود.	درآمدها: این شاخص، بیان‌گر مجموع مبالغی است که هر یک از شعب از طریق ارائه‌ی خدمات بانکی و تخصیص تسهیلات به مشتریان خود، دریافت می‌کند (درآمدهای یک شعبه شامل کارمزدهای بانکی، سود سرمایه‌گذاری‌ها، سود تسهیلات و ... می‌باشد). این شاخص برحسب میلیارد ریال بیان می‌شود.
پرداخت‌های انگیزشی: در آخر هر فصل (هر سه ماه یک بار)، در ازای بهره‌وری و کارایی هر شعبه، مبلغی به‌عنوان پاداش در اختیار رئیس شعبه قرار می‌گیرد و بر طبق تصمیم‌گیری وی، این مبلغ در بین کارکنان شعبه تقسیم می‌شود.	سپرده‌ها: این شاخص، بیان‌گر مجموع مبالغی است که هر یک از شعب، در بازه‌های زمانی مشخص از طریق جذب سپرده‌ها، اعم از سپرده‌های قرض‌الحسنه‌ی جاری، قرض‌الحسنه‌ی پس‌انداز، سرمایه‌گذاری‌های کوتاه‌مدت و بلندمدت، از مشتریان خود جمع‌آوری می‌کند.
خدمات الکترونیکی: کلیه‌ی خدماتی که بانک در ازای صدور انواع کارت‌های الکترونیکی به مشتریان خود ارائه می‌دهد، خدمات الکترونیکی گفته می‌شود.	بهره‌وری خالص ATM: این شاخص، بیان‌گر میزان سودآوری خودپردازهای نصب‌شده توسط هر شعبه می‌باشد.

ج: اگر کران بالا و کران پایین کارایی DMU، هر دو، کمتر از یک باشد، آنگاه واحد تحت ارزیابی، ناکارا خواهد بود.

$$E^{-} = \left[DMU_j : \theta^L \prec 1, \theta^U \prec 1 \right] \quad (۹)$$

جعفری / مدیریت نوآوری و راهبردهای عملیاتی، دوره ۱، شماره ۳، صفحه: ۲۹۷-۳۰۹

با توجه به موارد (الف) تا (ج)، می‌توان گفت واحدهای ۱، ۳، ۷، ۸، ۹، ۱۳، ۱۶، ۱۸، ۲۱، ۲۳ و ۲۴ کارا می‌باشند، واحدهای ۲، ۵، ۱۰، ۱۲، ۱۷،۱۴، ۱۹ و ۲۰ ناکارا می‌باشند و در کارا یا ناکارا بودن بقیه‌ی واحدها نمی‌توان به‌طور دقیق اظهارنظر نمود.

جدول ۵- میزان کارایی و کارایی بالا و پایین شعب تحت ارزیابی با داده‌های بازه‌ای.

Table 5- Efficiency and its upper lower branch of DMU under evaluation with interval data.

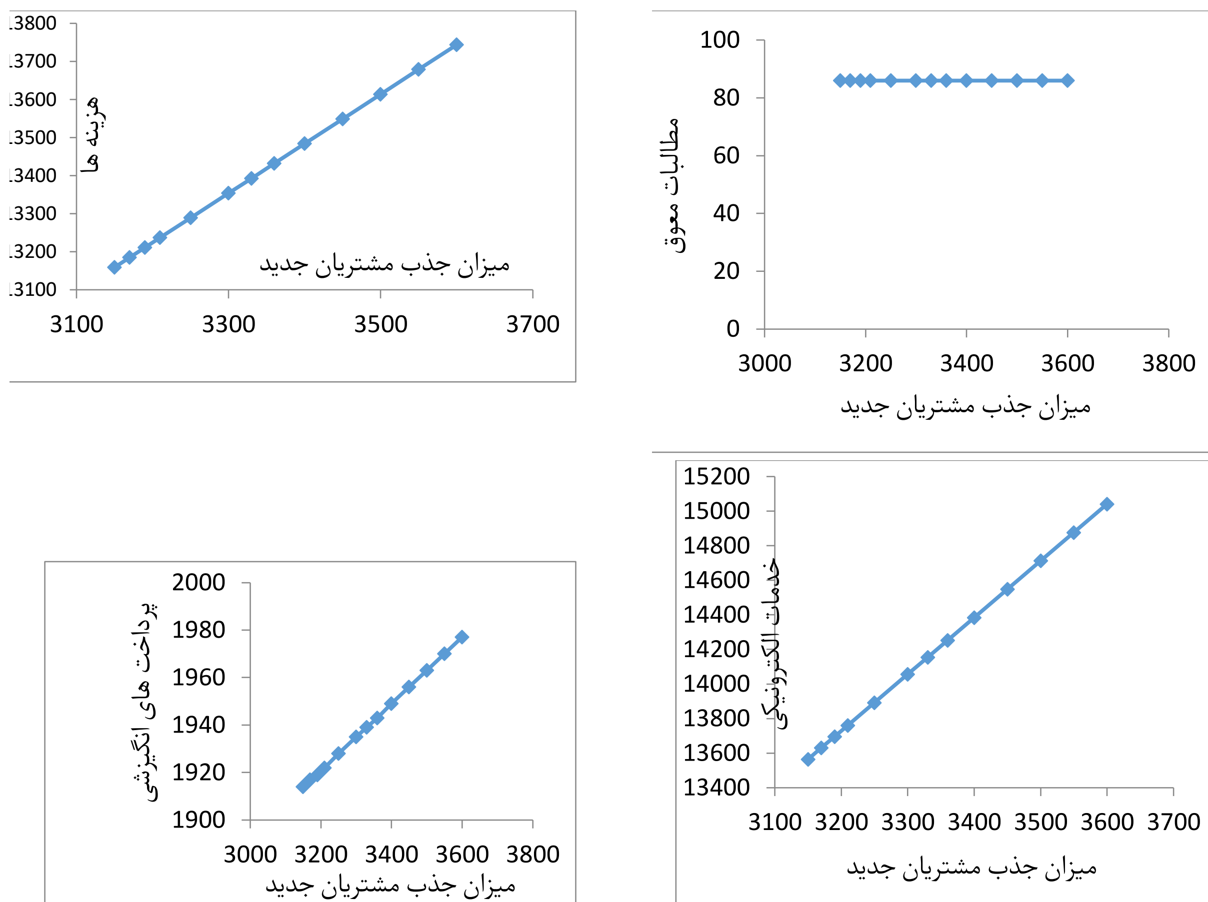
نام شعبه	میزان کارایی ورودی محور (θ^*)	[θ_*^L و θ_*^U] میزان کارایی	نام شعبه	میزان کارایی ورودی محور (θ^*)	[θ_*^L و θ_*^U] میزان کارایی
شعبه ۱	۱	[1 و1]	شعبه ۱۳	1	[1 و1]
شعبه ۲	0.51	[0.47 و0.52]	شعبه ۱۴	0.73	[0.68و0.74]
شعبه ۳	۱	[1 و1]	شعبه ۱۵	0.89	[0.67 و1]
شعبه ۴	۱	[0.99 و1]	شعبه ۱۶	1	[1و1]
شعبه ۵	0.96	[0.93و0.96]	شعبه ۱۷	0.87	[0.84و0.90]
شعبه ۶	1	[0.90702و1]	شعبه ۱۸	1	[1و1]
شعبه ۷	1	[1و1]	شعبه ۱۹	0.88	[0.88و0.89]
شعبه ۸	1	[1و1]	شعبه ۲۰	0.82	[0.81و0.82]
شعبه ۹	0.9	[1و1]	شعبه ۲۱	1	[1و1]
شعبه ۱۰	1	[0.790.90]	شعبه ۲۲	1	[0.93و1]
شعبه ۱۱	0.77	[0.83455و1]	شعبه ۲۳	1	[1و1]
شعبه ۱۲	1	[0.73و0.76]	شعبه ۲۴	1	[1و1]

تجزیه‌وتحلیل را می‌توانیم برای همه شعب انجام دهیم؛ لیکن در حال حاضر، فقط برای واحد تحت ارزیابی دوم که یک واحد ناکاراست، انجام می‌دهیم. مدل مسئله را می‌توانیم به‌صورت روابط زیر بنویسیم. میزان کارایی در بازه (۰/۵۲ و ۰/۴۷) می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
&Min\, w_1\alpha_{12}^L + w_1\alpha_{22}^L + w_1\alpha_{32}^L + w_1\alpha_{42}^L \\
&S.t. \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j x_{1j}^U + 13000\lambda_2 \le 0.52987\alpha_{12}^L \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j x_{2j}^U + 145.90\lambda_2 \le 0.52987\alpha_{22}^L \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j x_{3j}^U + 1732\lambda_2 \le 0.52987\alpha_{32}^L \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j x_{4j}^U + 15110\lambda_2 \le 0.52987\alpha_{42}^L \\
&\sum_{i=1}^{24} \lambda_j y_{1j}^L + 3300\lambda_2 \le \beta_{12}^U
\end{aligned}
\qquad (۱۰)
$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j y_{2j}^{\varepsilon} + 495130.90\lambda_2 \le \beta_{22}^{\varepsilon'}$$
$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j y_{3j}^{\varepsilon} + 4472\lambda_2 \le \beta_{32}^{\varepsilon'}$$
$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j y_{4j}^{\varepsilon} + 153.95\lambda_2 \le \beta_{42}^{\varepsilon'}$$
$$\lambda_j \ge 0;\ j = 1, \ldots, 24$$

در شکل ۲، به ازای کران بالای شاخص خروجی، میزان جذب مشتریان جدید، میزان روند تغییرات کران پایین شاخص هزینه‌ها، روند تغییرات کران پایین شاخص مطالبات معوق، روند تغییرات کران پایین شاخص پرداخت‌های انگیزشی و تغییرات کران پایین شاخص خدمات الکترونیکی نمایش داده شده است.



شکل ۲- روند تغییرات کران پایین شاخص‌های ورودی در ازای افزایش کران بالای شاخص جذب مشتریان جدید.

Figure 2- The trend of lower boundary changes of input indicators in exchange for increasing the upper boundary of new customer attraction index.

همان‌طور که مشاهده می‌گردد و البته انتظار هم داشتیم، ازآنجایی‌که مقدار خروجی افزایش می‌یابد و فرض بر این است که میزان کارایی نیز ثابت بماند، لذا برآیند ورودی‌ها افزایش می‌یابد؛ این روند در نمودارها قابل مشاهده می‌باشد و متناسب با افزایش میزان جذب مشتری جدید، میزان تغییرات شاخص‌های ورودی به‌وضوح نشان داده شده است.

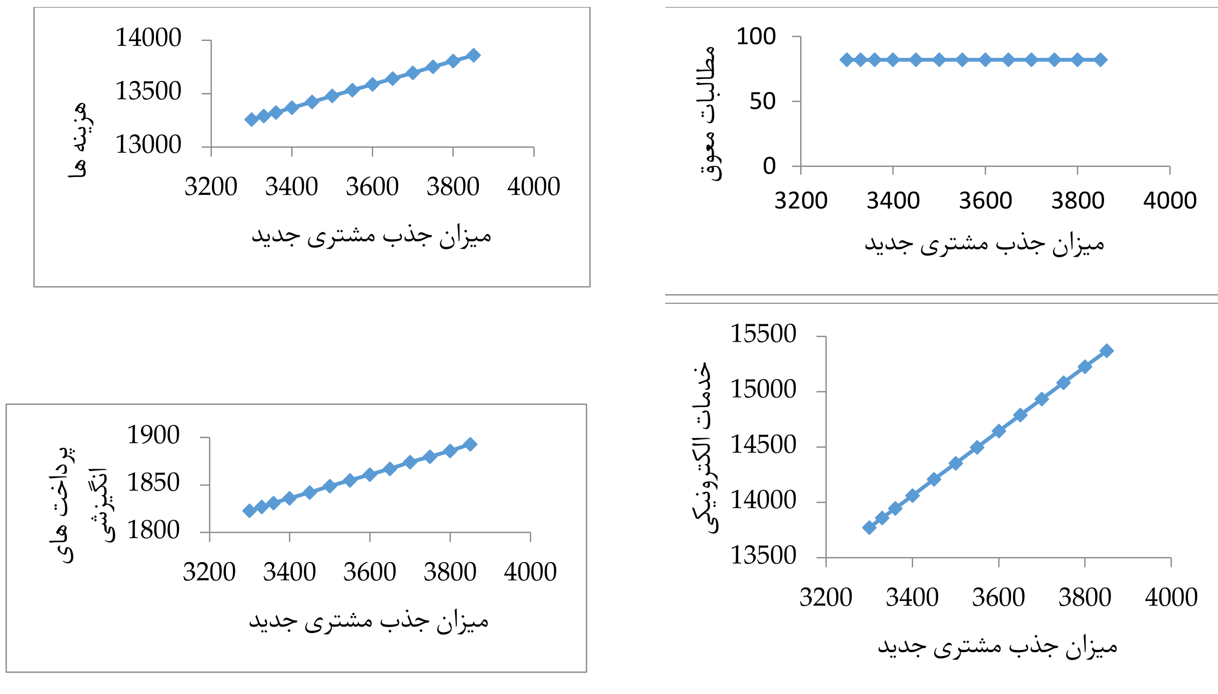
مدیریت می‌تواند متناسب با توانمندی مجموعه در شاخص‌های ورودی، نسبت به میزان افزایش شاخص جذب مشتریان جدید اقدام نماید.

اگر β^{L}_{12}،β^{L}_{22}،β^{L}_{32} وβ^{L}_{42} مقادیر جدید خروجی برای واحد تحت ارزیابی دوم که یک واحد ناکاراست باشند (توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شوند)، حال می‌خواهیمα^{U}_{12}،α^{U}_{22}،α^{U}_{32} وα^{U}_{42} بیشترین مقدار ورودی‌های این واحد را تخمین بزنیم. می‌دانیم میزان کارایی واحد دوم در بازه (0.52و 0.47) می‌باشد و فرض بر ثابت ماندن کارایی در محاسبات می‌باشد که به کمک معادلات (۱۱) انجام می‌پذیرد.

$$
\begin{aligned}
&Min\, w_1\alpha^{U}_{12} + w_1\alpha^{U}_{22} + w_1\alpha^{U}_{32} + w_1\alpha^{U}_{42} \\
&S.t. \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j x^{L}_{1j} + 14000\lambda_2 \le 0.47904\alpha^{U}_{12} \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j x^{U}_{2j} + 149\lambda_2 \le 0.47904\alpha^{U}_{22} \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j x^{U}_{3j} + 1734.40\lambda_2 \le 0.47904\alpha^{U}_{32} \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j x^{U}_{4j} + 15170\lambda_2 \le 0.47904\alpha^{U}_{42} \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j y^{L}_{1j} + 3150\lambda_2 \le \beta^{L}_{12} \qquad (۱۱) \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j y^{L}_{2j} + 495110.80\lambda_2 \le \beta^{L}_{22} \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j y^{L}_{3j} + 4459\lambda_2 \le \beta^{L}_{32} \\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{24} \lambda_j y^{L}_{4j} + 1151.70\lambda_2 \le \beta^{L}_{42} \\
&\lambda_j \ge 0;\, j = 1, \dots, 24
\end{aligned}
$$

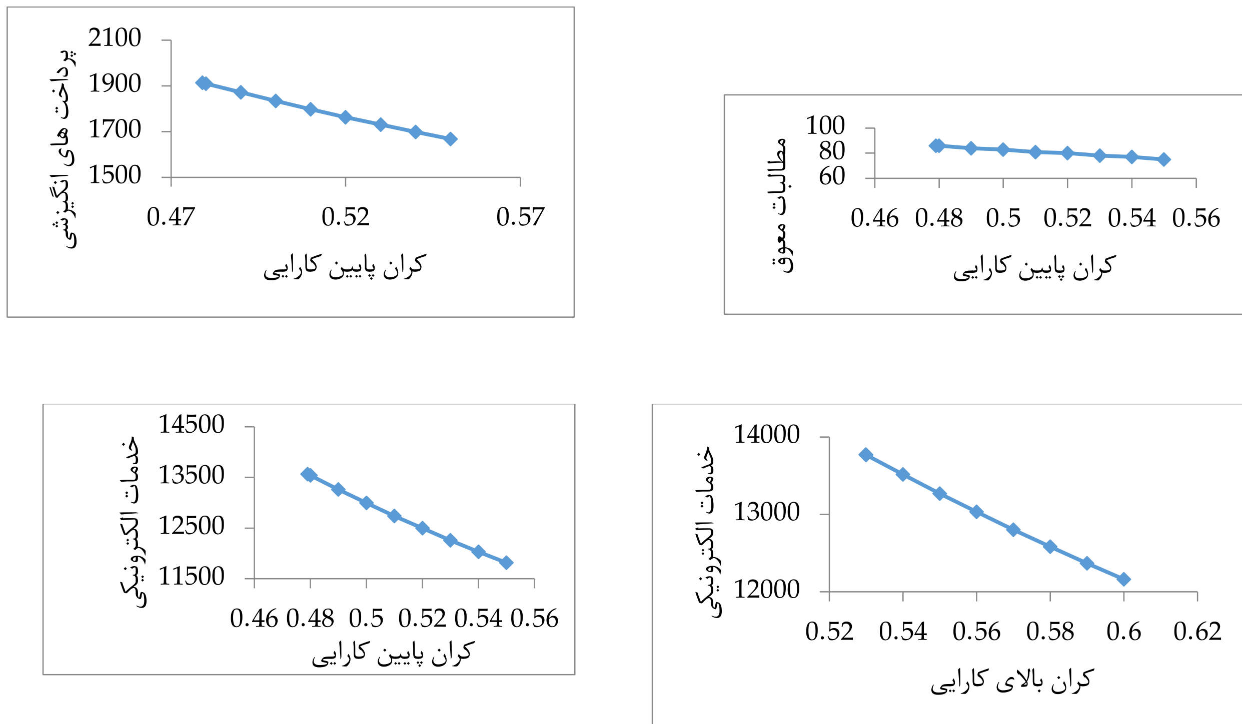
بر اساس مقادیر ۱۴۰۰۰، ۱۴۹، ۱۷۳۴/۴۰ و ۱۵۱۷۰، مقادیر کران‌های بالای ورودی‌ها و مقادیر ۳۱۵۰، ۴۹۵۱۱۰/۸۰، ۴۴۵۹ و ۱۱۵۱/۷۰، کران‌های پایین خروجی برای DMU_2، شکل ۳ روند تغییرات کران‌های بالای ورودی‌ها را به ازای تغییر در کران پایین شاخص خروجی میزان جذب مشتری جدید با فرض ثابت ماندن میزان کران پایین کارایی، نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار داریم، ازآنجایی‌که مقدار خروجی افزایش می‌یابد و فرض بر این است که میزان کارایی ثابت بماند، لذا برآیند ورودی‌ها افزایش می‌یابد و این روند در نمودارها مشاهده می‌شود.

در اینجا در نظر داریم میزان کارایی واحد تحت ارزیابی را بهبود (افزایش) دهیم و با فرض ثابت ماندن سطوح خروجی، به تخمین سطوح ورودی بپردازیم. با توجه به اینکه در نظر داریم کران بالای ورودی‌ها را تخمین بزنیم، لذا در مدل مربوطه، مقادیر خروجی را ثابت فرض کرده، از مقادیر جدید کارایی استفاده می‌نماییم و کران بالای ورودی‌ها را تخمین می‌زنیم؛ بنابراین، با توجه به اینکه کارایی، عبارت است از کسر مجموع موزون خروجی‌ها به مجموع موزون ورودی‌ها، چنانچه خروجی‌ها ثابت و سطح کارایی بهبود یابد، مطابق نمودارهای زیر، برآیند سطوح ورودی جدید نسبت به قبل، کاهش داشته است و این امر، در شکل‌ها ۳ و ۴ قابل مشاهده است.



شکل ۳- روند تغییرات کران بالای شاخص ورودی در ازای افزایش کران پایین شاخص خروجی میزان جذب مشتریان جدید.

Figure 3- The trend of changes in the upper limit of the input index in exchange for increasing the lower limit of the output index, the rate of attracting new customers.



شکل ۴ - روند تغییرات شاخص خروجی‌ها در ازای افزایش کران پایین کارایی.

Figure 4- The trend of changes in the output index in exchange for increasing the lower efficiency limit.

همان‌طوری در شکل‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌گردد، با تغییرات ایجادشده در کارایی واحدها، می‌توانیم تغییرات خروجی‌ها را مشاهده کنیم؛ این مهم می‌تواند در خصوص تغییرات ورودی‌ها نیز انجام بپذیرد.

نتیجه‌گیری

امروزه محاسبه کارایی و چگونگی روند حرکت هر سازمان، یکی از مهم‌ترین مسائل مدیریت کلان آن سازمان می‌باشد. یکی از مسائلی که در این مقاله بیشتر مورد توجه قرارگرفته است، مسئله‌ی تصمیم‌گیری و پیش‌بینی است؛ به‌گونه‌ای که بعد از استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای تعیین سطح کارایی واحدهای تحت ارزیابی، از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های معکوس یعنی مدل‌هایی که جهت تخمین سطوح ورودی و خروجی استفاده می‌شود، بهره گرفته شده است تا بتوان تصمیمات و برنامه‌ریزی‌های مدیران را اعمال نمود.

پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی

در این تحقیق در دو حالت قطعی و بازه‌ای، مسئله تخمین ورودی‌ها و خروجی‌ها را اعمال کردیم ولی تاکنون مسئله برای ساختار شبکه‌ای بررسی نشده است.

منابع

Despotis, D. K., & Smirlise, Y., (2002). Data envelopment analysis with imprecise data. *European journal of operational research*, *140*(1), 24-36.

Hadi-Vencheh, A., & Foroughi, A. A. (2006). A generalized DEA model for inputs/outputs estimation. *Mathematical and computer modelling*, *43*(5-6), 447-457.

Hosseinzadeh, A. A., Alahviranloo, T., Hosseinzadeh Loti, F., & Vaez-Ghasemi, M. (2018). Solving fully interval linear programming problems. (In press)

Jahanshahloo, G. R., Lofti, F. H., & Moradi, M. (2004). Sensitivity and stability analysis in DEA with interval data. *Applied mathematics and computation*, *156*(2), 463-477.

Jahanshahloo, G. R., Matin, R. K., & Vencheh, A. H. (2004). On FDH efficiency analysis with interval data. *Applied mathematics and computation*, *159*(1), 47-55.

Jahanshahloo, G. R., Matin, R. K., & Vencheh, A. H. (2004). On return to scale of fully efficient DMUs in data envelopment analysis under interval data. *Applied mathematics and computation*, *154*(1), 31-40.

Wei, Q., Zhang, J., & Zhang, X. (2000). An inverse DEA model for inputs/outputs estimate. *European journal of operational research*, *121*(1), 151-163.

Yan, H., Wei, Q., & Hao, G. (2002). DEA models for resource reallocation and production input/output estimation. *European journal of operational research*, *136*(1), 19-31.

